HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS

Matemáticas, estudio de las relaciones entre cantidades, magnitudes y propiedades, y de las operaciones lógicas utilizadas para deducir cantidades, magnitudes y propiedades desconocidas. En el pasado las matemáticas eran consideradas como la ciencia de la cantidad, referida a las magnitudes (como en la geometría), a los números (como en la aritmética), o a la generalización de ambos (como en el álgebra). Hacia mediados del siglo XIX las matemáticas se empezaron a considerar como la ciencia de las relaciones, o como la ciencia que produce condiciones necesarias. Esta última noción abarca la lógica matemática o simbólica —ciencia que consiste en utilizar símbolos para generar una teoría exacta de deducción e inferencia lógica basada en definiciones, axiomas, postulados y reglas que transforman elementos primitivos en relaciones y teoremas más complejos.

Trataremos la evolución de los conceptos e ideas matemáticas siguiendo su desarrollo histórico. En realidad, las matemáticas son tan antiguas como la propia humanidad: en los diseños prehistóricos de cerámica, tejidos y en las pinturas rupestres se pueden encontrar evidencias del sentido geométrico y del interés en figuras geométricas. Los sistemas de cálculo primitivos estaban basados, seguramente, en el uso de los dedos de una o dos manos, lo que resulta evidente por la gran abundancia de sistemas numéricos en los que las bases son los números 5 y 10.

Las matemáticas en la antigüedad

Las primeras referencias a matemáticas avanzadas y organizadas datan del tercer milenio a.C., en Babilonia y Egipto. Estas matemáticas estaban dominadas por la aritmética, con cierto interés en medidas y cálculos geométricos y sin mención de conceptos matemáticos como los axiomas o las demostraciones.

Los primeros libros egipcios, escritos hacia el año 1800 a.C., muestran un sistema de numeración decimal con distintos símbolos para las sucesivas potencias de 10 (1, 10, 100…), similar al sistema utilizado por los romanos. Los números se representaban escribiendo el símbolo del 1 tantas veces como unidades tenía el número dado, el símbolo del 10 tantas veces como decenas había en el número, y así sucesivamente. Para sumar números, se sumaban por separado las unidades, las decenas, las centenas… de cada número. La multiplicación estaba basada en duplicaciones sucesivas y la división era el proceso inverso.

Los egipcios utilizaban sumas de fracciones unidad ($\frac{1}{n}$), junto con la fracción $\frac{2}{3}$, para expresar todas las fracciones. Por ejemplo, $\frac{2}{7}$ era la suma de las fracciones $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{28}$. Utilizando este sistema, los egipcios fueron capaces de resolver problemas aritméticos con fracciones, así como problemas algebraicos elementales. En geometría encontraron las reglas correctas para calcular el área de triángulos, rectángulos y trapecios, y el volumen de figuras como ortoedros, cilindros y, por supuesto, pirámides. Para calcular el área de un círculo, los egipcios utilizaban un cuadrado de lado $\frac{8}{9}$ del diámetro del círculo, valor muy cercano al que se obtiene utilizando la constante pi (3,14).

El sistema babilónico de numeración era bastante diferente del egipcio. En el babilónico se utilizaban tablillas con varias muescas o marcas en forma de cuña (cuneiforme); una cuña sencilla representaba al 1 y una marca en forma de flecha representaba al 10 (véase tabla adjunta). Los números menores que 59 estaban formados por estos símbolos utilizando un proceso aditivo, como en las matemáticas egipcias. El número 60, sin embargo, se representaba con el mismo símbolo que el 1, y a partir de ahí, el valor de un símbolo venía dado por su posición en el número completo. Por ejemplo, un número compuesto por el símbolo del 2, seguido por el del 27 y terminado con el del 10, representaba $2 \times 60^2 + 27 \times 60 + 10$. Este mismo principio fue ampliado a la representación de fracciones, de manera que el ejemplo anterior podía también representar $2 \times 60 + 27 + 10 \times (\frac{1}{60})$, o $2 + 27 \times (\frac{1}{60}) + 10 \times (\frac{1}{60})^{-2}$. Este sistema, denominado *sexagesimal* (base 60), resultaba tan útil como el sistema decimal (base 10).

Con el tiempo, los babilonios desarrollaron unas matemáticas más sofisticadas que les permitieron encontrar las raíces positivas de cualquier ecuación de segundo grado. Fueron incluso capaces de encontrar las raíces de algunas ecuaciones de tercer grado, y resolvieron problemas más complicados utilizando el teorema de Pitágoras. Los babilonios compilaron una gran cantidad de tablas, incluyendo tablas de multiplicar y de dividir, tablas de cuadrados y tablas de interés compuesto. Además, calcularon no sólo la suma de progresiones aritméticas y de algunas geométricas, sino también de sucesiones de cuadrados. También obtuvieron una buena aproximación de $\sqrt{2}$.

Las matemáticas en Grecia

Los griegos tomaron elementos de las matemáticas de los babilonios y de los egipcios. La innovación más importante fue la invención de las matemáticas abstractas basadas en una estructura lógica de definiciones, axiomas y demostraciones. Según los cronistas griegos, este avance comenzó en el siglo VI a.C. con Tales de Mileto y Pitágoras de Samos. Este último enseñó la importancia del estudio de los números para poder entender el mundo. Algunos de sus discípulos hicieron importantes descubrimientos sobre la teoría de números y la geometría, que se atribuyen al propio Pitágoras.

En el siglo V a.C., algunos de los más importantes geómetras fueron el filósofo atomista Demócrito de Abdera, que encontró la fórmula correcta para calcular el volumen de una pirámide, e Hipócrates de Cos, que descubrió que el área de figuras geométricas en forma de media luna limitadas por arcos circulares son iguales a las de ciertos triángulos. Este descubrimiento está relacionado con el famoso problema de la cuadratura del círculo (construir un cuadrado de área igual a un círculo dado). Otros dos problemas bastante conocidos que tuvieron su origen en el mismo periodo son la trisección de un ángulo y la duplicación del cubo (construir un cubo cuyo volumen es dos veces el de un cubo dado). Todos estos problemas fueron resueltos, mediante diversos métodos, utilizando instrumentos más complicados que la regla y el compás. Sin embargo, hubo que esperar hasta el siglo XIX para demostrar finalmente que estos tres problemas no se pueden resolver utilizando solamente estos dos instrumentos básicos.

A finales del siglo V a.C., un matemático griego descubrió que no existe una unidad de longitud capaz de medir el lado y la diagonal de un cuadrado, es decir, una de las dos cantidades es *inconmensurable.* Esto significa que no existen dos números naturales *m* y *n* cuyo cociente sea igual a la proporción entre el lado y la diagonal. Dado que los griegos sólo utilizaban los números naturales (1, 2, 3…), no pudieron expresar numéricamente este cociente entre la diagonal y el lado de un cuadrado (este número, $\sqrt{2}$, es lo que hoy se denomina *número irracional*). Debido a este descubrimiento se abandonó la teoría pitagórica de la proporción, basada en números, y se tuvo que crear una nueva teoría no numérica. Ésta fue introducida en el siglo IV a.C. por el matemático Eudoxo de Cnido, y la solución se puede encontrar en los *Elementos* de Euclides. Eudoxo, además, descubrió un método para demostrar rigurosamente supuestos sobre áreas y volúmenes mediante aproximaciones sucesivas.

Euclides, matemático y profesor que trabajaba en el famoso Museo de Alejandría, también escribió tratados sobre óptica, astronomía y música. Los trece libros que componen sus *Elementos* contienen la mayor parte del conocimiento matemático existente a finales del siglo IV a.C., en áreas tan diversas como la geometría de polígonos y del círculo, la teoría de números, la teoría de los inconmensurables, la geometría del espacio y la teoría elemental de áreas y volúmenes.

El siglo posterior a Euclides estuvo marcado por un gran auge de las matemáticas, como se puede comprobar en los trabajos de Arquímedes de Siracusa y de un joven contemporáneo, Apolonio de Perga. Arquímedes utilizó un nuevo método teórico, basado en la ponderación de secciones infinitamente pequeñas de figuras geométricas, para calcular las áreas y volúmenes de figuras obtenidas a partir de las cónicas. Éstas habían sido descubiertas por un alumno de Eudoxo llamado Menaechmo, y aparecían como tema de estudio en un tratado de Euclides; sin embargo, la primera referencia escrita conocida aparece en los trabajos de Arquímedes. También investigó los centros de gravedad y el equilibrio de ciertos cuerpos sólidos flotando en agua. Casi todo su trabajo es parte de la tradición que llevó, en el siglo XVII, al desarrollo del cálculo. Su contemporáneo, Apolonio, escribió un tratado en ocho tomos sobre las cónicas, y estableció sus nombres: elipse, parábola e hipérbola. Este tratado sirvió de base para el estudio de la geometría de estas curvas hasta los tiempos del filósofo y científico francés René Descartes en el siglo XVII.

Después de Euclides, Arquímedes y Apolonio, Grecia no tuvo ningún geómetra de la misma talla. Los escritos de Herón de Alejandría en el siglo I d.C. muestran cómo elementos de la tradición aritmética y de medidas de los babilonios y egipcios convivieron con las construcciones lógicas de los grandes geómetras. Los libros de Diofante de Alejandría en el siglo III d.C. continuaron con esta misma tradición, aunque ocupándose de problemas más complejos. En ellos Diofante encuentra las soluciones enteras para aquellos problemas que generan ecuaciones con varias incógnitas. Actualmente, estas ecuaciones se denominan diofánticas y se estudian en el análisis diofántico.

Las matemáticas aplicadas en Grecia

En paralelo con los estudios sobre matemáticas puras hasta ahora mencionados, se llevaron a cabo estudios de óptica, mecánica y astronomía. Muchos de los grandes matemáticos, como Euclides y Arquímedes, también escribieron sobre temas astronómicos. A principios del siglo II a.C., los astrónomos griegos adoptaron el sistema babilónico de almacenamiento de fracciones y, casi al mismo tiempo, compilaron tablas de las cuerdas de un círculo. Para un círculo de radio determinado, estas tablas daban la longitud de las cuerdas en función del ángulo central correspondiente, que crecía con un determinado incremento. Eran similares a las modernas tablas del seno y coseno, y marcaron el comienzo de la trigonometría. En la primera versión de estas tablas —las de Hiparco, hacia el 150 a.C.— los arcos crecían con un incremento de $7\frac{1}{2}°$, de 0° a 180°. En tiempos del astrónomo Tolomeo, en el siglo II d.C., la maestría griega en el manejo de los números había avanzado hasta tal punto que Tolomeo fue capaz de incluir en su *Almagesto* una tabla de las cuerdas de un círculo con incrementos de $\frac{1}{2}°$ que, aunque expresadas en forma sexagesimal, eran correctas hasta la quinta cifra decimal.

Mientras tanto, se desarrollaron otros métodos para resolver problemas con triángulos planos y se introdujo un teorema —que recibe el nombre del astrónomo Menelao de Alejandría— para calcular las longitudes de arcos de esfera en función de otros arcos. Estos avances dieron a los astrónomos las herramientas necesarias para resolver problemas de astronomía esférica, y para desarrollar el sistema astronómico que sería utilizado hasta la época del astrónomo alemán Johannes Kepler.

Las matemáticas en la edad media

En Grecia, después de Tolomeo, se estableció la tradición de estudiar las obras de estos matemáticos de siglos anteriores en los centros de enseñanza. El que dichos trabajos se hayan conservado hasta nuestros días se debe principalmente a esta tradición. Sin embargo, los primeros avances matemáticos consecuencia del estudio de estas obras aparecieron en el mundo árabe.

Las matemáticas en el mundo islámico

Después de un siglo de expansión en la que la religión musulmana se difundió desde sus orígenes en la península Arábiga hasta dominar un territorio que se extendía desde la península Ibérica hasta los límites de la actual China, los árabes empezaron a incorporar a su propia ciencia los resultados de "ciencias extranjeras". Los traductores de instituciones como la Casa de la Sabiduría de Bagdad, mantenida por los califas gobernantes y por donaciones de particulares, escribieron versiones árabes de los trabajos de matemáticos griegos e indios.

Hacia el año 900, el periodo de incorporación se había completado y los estudiosos musulmanes comenzaron a construir sobre los conocimientos adquiridos. Entre otros avances, los matemáticos árabes ampliaron el sistema indio de posiciones decimales en aritmética de números enteros, extendiéndolo a las fracciones decimales. En el siglo XII, el matemático persa Omar Jayyam generalizó los métodos indios de extracción de raíces cuadradas y cúbicas para calcular raíces cuartas, quintas y de grado superior. El matemático árabe Al-Jwārizmī; (de su nombre procede la palabra algoritmo, y el título de uno de sus libros es el origen de la palabra álgebra) desarrolló el álgebra de los polinomios; al-Karayi la completó para polinomios incluso con infinito número de términos. Los geómetras, como Ibrahim ibn Sinan, continuaron las investigaciones de Arquímedes sobre áreas y volúmenes. Kamal al-Din y otros aplicaron la teoría de las cónicas a la resolución de problemas de óptica. Los matemáticos Habas al-Hasib y Nasir ad-Din at-Tusi crearon trigonometrías plana y esférica utilizando la función seno de los indios y el teorema de Menelao. Estas trigonometrías no se convirtieron en disciplinas matemáticas en Occidente hasta la publicación del *De triangulis omnimodis* (1533) del astrónomo alemán Regiomontano.

Finalmente, algunos matemáticos árabes lograron importantes avances en la teoría de números, mientras otros crearon una gran variedad de métodos numéricos para la resolución de ecuaciones. Los países europeos con lenguas latinas adquirieron la mayor parte de estos conocimientos durante el siglo XII, el gran siglo de las traducciones. Los trabajos de los árabes, junto con las traducciones de los griegos clásicos fueron los principales responsables del crecimiento de las matemáticas durante la edad media. Los matemáticos italianos, como Leonardo Fibonacci y Luca Pacioli (uno de los grandes tratadistas del siglo XV en álgebra y aritmética, que desarrollaba para aplicar en el comercio), se basaron principalmente en fuentes árabes para sus estudios.

Las matemáticas durante el renacimiento

Aunque el final del periodo medieval fue testigo de importantes estudios matemáticos sobre problemas del infinito por autores como Nicole Oresme, no fue hasta principios del siglo XVI cuando se hizo un descubrimiento matemático de trascendencia en Occidente. Era una fórmula algebraica para la resolución de las ecuaciones de tercer y cuarto grado, y fue publicado en 1545 por el matemático italiano Gerolamo Cardano en su *Ars magna.* Este hallazgo llevó a los matemáticos a interesarse por los números complejos y estimuló la búsqueda de soluciones similares para ecuaciones de quinto grado y superior. Fue esta búsqueda la que a su vez generó los primeros trabajos sobre la teoría de grupos a finales del siglo XVIII y la teoría de ecuaciones del matemático francés Évariste Galois a principios del XIX.

También durante el siglo XVI se empezaron a utilizar los modernos signos matemáticos y algebraicos. El matemático francés François Viète llevó a cabo importantes estudios sobre la resolución de ecuaciones. Sus escritos ejercieron gran influencia en muchos matemáticos del siglo posterior, incluyendo a Pierre de Fermat en Francia e Isaac Newton en Inglaterra.

Avances en el siglo XVII

Los europeos dominaron el desarrollo de las matemáticas después del renacimiento.

Durante el siglo XVII tuvieron lugar los más importantes avances en las matemáticas desde la era de Arquímedes y Apolonio. El siglo comenzó con el descubrimiento de los logaritmos por el matemático escocés John Napier (Neper); su gran utilidad llevó al astrónomo francés Pierre Simon Laplace a decir, dos siglos más tarde, que Neper, al reducir el trabajo de los astrónomos a la mitad, les había duplicado la vida.

La ciencia de la teoría de números, que había permanecido aletargada desde la época medieval, es un buen ejemplo de los avances conseguidos en el siglo XVII basándose en los estudios de la antigüedad clásica. La obra *Las aritméticas* de Diofante ayudó a Fermat a realizar importantes descubrimientos en la teoría de números. Su conjetura más destacada en este campo fue que no existen soluciones de la ecuación $a_n + b_n = c_n$ con *a, b* y *c* enteros positivos si *n* es mayor que 2. Esta conjetura, conocida como último teorema de Fermat, ha generado gran cantidad de trabajos en el álgebra y la teoría de números.

En geometría pura, dos importantes acontecimientos ocurrieron en este siglo. El primero fue la publicación, en el *Discurso del método* (1637) de Descartes, de su descubrimiento de la geometría analítica, que mostraba cómo utilizar el álgebra (desarrollada desde el renacimiento) para investigar la geometría de las curvas (Fermat había hecho el mismo descubrimiento pero no lo publicó). El *Discurso del método,* junto con una serie de pequeños tratados con los que fue publicado, ayudó y fundamentó los trabajos matemáticos de Isaac Newton hacia 1660. El segundo acontecimiento que afectó a la geometría fue la publicación, por el ingeniero francés Gérard Desargues, de su descubrimiento de la geometría proyectiva en 1639. Aunque este trabajo fue alabado por Descartes y por el científico y filósofo francés Blaise Pascal, su terminología excéntrica y el gran entusiasmo que había causado la aparición de la geometría analítica retrasó el desarrollo de sus ideas hasta principios del siglo XIX, con los trabajos del matemático francés Jean Victor Poncelet.

Otro avance importante en las matemáticas del siglo XVII fue la aparición de la teoría de la probabilidad a partir de la correspondencia entre Pascal y Fermat sobre un problema presente en los juegos de azar, el llamado problema de puntos. Este trabajo no fue publicado, pero llevó al científico holandés Christiaan Huygens a escribir un pequeño folleto sobre probabilidad en juegos con dados, que fue publicado en el *Ars coniectandi* (1713) del matemático suizo Jacques Bernoulli. Tanto Bernoulli como el francés Abraham De Moivre, en su *Doctrina del azar* de 1718, utilizaron el recién descubierto cálculo para avanzar rápidamente en su teoría, que para entonces tenía grandes aplicaciones en pujantes compañías de seguros.

Sin embargo, el acontecimiento matemático más importante del siglo XVII fue, sin lugar a dudas, el descubrimiento por parte de Newton de los cálculos diferencial e integral, entre 1664 y 1666. Newton se basó en los trabajos anteriores de dos compatriotas, John Wallis e Isaac Barrow, así como en los estudios de otros matemáticos europeos como Descartes, Francesco Bonaventura Cavalieri, Johann van Waveren Hudde y Gilles Personne de Roberval. Unos ocho años más tarde, el alemán Gottfried Wilhelm Leibniz descubrió también el cálculo y fue el primero en publicarlo, en 1684 y 1686. El sistema de notación de Leibniz es el que se usa hoy en el cálculo.

Situación en el siglo XVIII

Durante el resto del siglo XVII y buena parte del XVIII, los discípulos de Newton y Leibniz se basaron en sus trabajos para resolver diversos problemas de física, astronomía e ingeniería, lo que les permitió, al mismo tiempo, crear campos nuevos dentro de las matemáticas. Así, los hermanos Jean y Jacques Bernoulli inventaron el cálculo de variaciones y el matemático francés

Gaspard Monge la geometría descriptiva. Joseph Louis Lagrange, también francés, dio un tratamiento completamente analítico de la mecánica en su gran obra *Mecánica analítica* (1788), en donde se pueden encontrar las famosas ecuaciones de Lagrange para sistemas dinámicos. Además, Lagrange hizo contribuciones al estudio de las ecuaciones diferenciales y la teoría de números, y desarrolló la teoría de grupos. Su contemporáneo Laplace escribió *Teoría analítica de las probabilidades* (1812) y el clásico *Mecánica celeste* (1799-1825), que le valió el sobrenombre de 'el Newton francés'.

El gran matemático del siglo XVIII fue el suizo Leonhard Euler, quien aportó ideas fundamentales sobre el cálculo y otras ramas de las matemáticas y sus aplicaciones. Euler escribió textos sobre cálculo, mecánica y álgebra que se convirtieron en modelos a seguir para otros autores interesados en estas disciplinas. Sin embargo, el éxito de Euler y de otros matemáticos para resolver problemas tanto matemáticos como físicos utilizando el cálculo sólo sirvió para acentuar la falta de un desarrollo adecuado y justificado de las ideas básicas del cálculo. La teoría de Newton estaba basada en la cinemática y las velocidades, la de Leibniz en los infinitésimos, y el tratamiento de Lagrange era completamente algebraico y basado en el concepto de las series infinitas. Todos estos sistemas eran inadecuados en comparación con el modelo lógico de la geometría griega, y este problema no fue resuelto hasta el siglo posterior.

Las matemáticas en el siglo XIX

En 1821, un matemático francés, Augustin Louis Cauchy, consiguió un enfoque lógico y apropiado del cálculo. Cauchy basó su visión del cálculo sólo en cantidades finitas y el concepto de límite. Sin embargo, esta solución planteó un nuevo problema, el de la definición lógica de número real. Aunque la definición de cálculo de Cauchy estaba basada en este concepto, no fue él sino el matemático alemán Julius W. R. Dedekind quien encontró una definición adecuada para los números reales, a partir de los números racionales, que todavía se enseña en la actualidad; los matemáticos alemanes Georg Cantor y Karl T. W. Weierstrass también dieron otras definiciones casi al mismo tiempo. Un problema más importante que surgió al intentar describir el movimiento de vibración de un muelle —estudiado por primera vez en el siglo XVIII— fue el de definir el significado de la palabra función. Euler, Lagrange y el matemático francés Joseph Fourier aportaron soluciones, pero fue el matemático alemán Peter G. L. Dirichlet quien propuso su definición en los términos actuales.

Además de fortalecer los fundamentos del análisis, nombre dado a partir de entonces a las técnicas del cálculo, los matemáticos del siglo XIX llevaron a cabo importantes avances en esta materia. A principios del siglo, Carl Friedrich Gauss dio una explicación adecuada del concepto de número complejo; estos números formaron un nuevo y completo campo del análisis, desarrollado en los trabajos de Cauchy, Weierstrass y el matemático alemán Bernhard Riemann. Otro importante avance del análisis fue el estudio, por parte de Fourier, de las sumas infinitas de expresiones con funciones trigonométricas. Éstas se conocen hoy como series de Fourier, y son herramientas muy útiles tanto en las matemáticas puras como en las aplicadas. Además, la investigación de funciones que pudieran ser iguales a series de Fourier llevó a Cantor al estudio de los conjuntos infinitos y a una aritmética de números infinitos. La teoría de Cantor, que fue considerada como demasiado abstracta y criticada como "enfermedad de la que las matemáticas se curarán pronto", forma hoy parte de los fundamentos de las matemáticas y recientemente ha encontrado una nueva aplicación en el estudio de corrientes turbulentas en fluidos.

Otro descubrimiento del siglo XIX que se consideró abstracto e inútil en su tiempo fue la geometría no euclídea. En esta geometría se pueden trazar al menos dos rectas paralelas a una recta dada que pasen por un punto que no pertenece a ésta. Aunque descubierta primero por Gauss, éste tuvo miedo de la controversia que su publicación pudiera causar. Los mismos resultados fueron descubiertos y publicados por separado por el matemático ruso Nikolái Ivánovich Lobachevski y por el húngaro János Bolyai. Las geometrías no euclídeas fueron estudiadas en su forma más general por Riemann, con su descubrimiento de las múltiples paralelas. En el siglo XX, a partir de los trabajos de Einstein, se le han encontrado también aplicaciones en física.

Gauss es uno de los más importantes matemáticos de la historia. Los diarios de su juventud muestran que ya en sus primeros años había realizado grandes descubrimientos en teoría de números, un área en la que su libro *Disquisitiones arithmeticae* (1801) marca el comienzo de la era moderna. En su tesis doctoral presentó la primera demostración apropiada del teorema fundamental del álgebra. A menudo combinó investigaciones científicas y matemáticas. Por ejemplo, desarrolló métodos estadísticos al mismo tiempo que investigaba la órbita de un planetoide recién descubierto, realizaba trabajos en teoría de potencias junto a estudios del magnetismo, o estudiaba la geometría de superficies curvas a la vez que desarrollaba sus investigaciones topográficas.

De mayor importancia para el álgebra que la demostración del teorema fundamental por Gauss fue la transformación que ésta sufrió durante el siglo XIX para pasar del mero estudio de los polinomios al estudio de la estructura de sistemas algebraicos. Un paso importante en esa dirección fue la invención del álgebra simbólica por el inglés George Peacock. Otro avance destacado fue el descubrimiento de sistemas algebraicos que tienen muchas propiedades de los números reales. Entre estos sistemas se encuentran las cuaternas del matemático irlandés William Rowan Hamilton, el análisis vectorial del matemático y físico estadounidense Josiah Willard Gibbs y los espacios ordenados de *n* dimensiones del matemático alemán Hermann Günther Grassmann. Otro paso importante fue el desarrollo de la teoría de grupos, a partir de los trabajos de Lagrange. Galois utilizó estos trabajos muy a menudo para generar una teoría sobre qué polinomios pueden ser resueltos con una fórmula algebraica.

Del mismo modo que Descartes había utilizado en su momento el álgebra para estudiar la geometría, el matemático alemán Felix Klein y el noruego Marius Sophus Lie lo hicieron con el álgebra del siglo XIX. Klein la utilizó para clasificar las geometrías según sus grupos de transformaciones (el llamado Programa Erlanger), y Lie la aplicó a una teoría geométrica de ecuaciones diferenciales mediante grupos continuos de transformaciones conocidas como grupos de Lie. En el siglo XX, el álgebra se ha aplicado a una forma general de la geometría conocida como topología.

También los fundamentos de las matemáticas fueron completamente transformados durante el siglo XIX, sobre todo por el matemático inglés George Boole en su libro *Investigación sobre las leyes del pensamiento* (1854) y por Cantor en su teoría de conjuntos. Sin embargo, hacia finales del siglo, se descubrieron una serie de paradojas en la teoría de Cantor. El matemático inglés Bertrand Russell encontró una de estas paradojas, que afectaba al propio concepto de conjunto. Los matemáticos resolvieron este problema construyendo teorías de conjuntos lo bastante restrictivas como para eliminar todas las paradojas conocidas, aunque sin determinar si podrían aparecer otras paradojas —es decir, sin demostrar si estas teorías son consistentes. Hasta nuestros días, sólo se han encontrado demostraciones relativas de consistencia (si la teoría *B* es consistente entonces la teoría *A* también lo es). Especialmente preocupante es la conclusión, demostrada en 1931 por el lógico estadounidense Kurt Gödel, según la cual en cualquier sistema de axiomas lo suficientemente complicado como para ser útil a las matemáticas es posible encontrar proposiciones cuya certeza no se puede demostrar dentro del sistema.

Las matemáticas actuales

En la Conferencia Internacional de Matemáticos que tuvo lugar en París en 1900, el matemático alemán David Hilbert expuso sus teorías. Hilbert era catedrático en Gotinga, el hogar académico de Gauss y Riemann, y había contribuido de forma sustancial en casi todas las ramas de las matemáticas, desde su clásico *Fundamentos de la geometría* (1899) a su *Fundamentos de la matemática* en colaboración con otros autores. La conferencia de Hilbert en París consistió en un repaso a 23 problemas matemáticos que él creía podrían ser las metas de la investigación matemática del siglo que empezaba. Estos problemas, de hecho, han estimulado gran parte de los trabajos matemáticos del siglo XX, y cada vez que aparecen noticias de que otro de los "problemas de Hilbert" ha sido resuelto, la comunidad matemática internacional espera los detalles con impaciencia.

A pesar de la importancia que han tenido estos problemas, un hecho que Hilbert no pudo imaginar fue la invención del ordenador o computadora digital programable, primordial en las matemáticas del futuro. Aunque los orígenes de las computadoras fueron las calculadoras de relojería de Pascal y Leibniz en el siglo XVII, fue Charles Babbage quien, en la Inglaterra del siglo XIX, diseñó una máquina capaz de realizar operaciones matemáticas automáticamente siguiendo una lista de instrucciones (programa) escritas en tarjetas o cintas. La imaginación de Babbage sobrepasó la tecnología de su tiempo, y no fue hasta la invención del relé, la válvula de vacío y después la del transistor cuando la computación programable a gran escala se hizo realidad. Este avance ha dado un gran impulso a ciertas ramas de las matemáticas, como el análisis numérico y las matemáticas finitas, y ha generado nuevas áreas de investigación matemática como el estudio de los algoritmos. Se ha convertido en una poderosa herramienta en campos tan diversos como la teoría de números, las ecuaciones diferenciales y el álgebra abstracta. Además, el ordenador ha permitido encontrar la solución a varios problemas matemáticos que no se habían podido resolver anteriormente, como el problema topológico de los cuatro colores propuesto a mediados del siglo XIX. El teorema dice que cuatro colores son suficientes para dibujar cualquier mapa, con la condición de que dos países limítrofes deben tener distintos colores. Este teorema fue demostrado en 1976 utilizando una computadora de gran capacidad de cálculo en la Universidad de Illinois (Estados Unidos).

El conocimiento matemático del mundo moderno está avanzando más rápido que nunca. Teorías que eran completamente distintas se han reunido para formar teorías más completas y abstractas. Aunque la mayoría de los problemas más importantes han sido resueltos, otros como las hipótesis de Riemann siguen sin solución. Al mismo tiempo siguen apareciendo nuevos y estimulantes problemas. Parece que incluso las matemáticas más abstractas están encontrando aplicación.

ARITMETICA

Aritmética, literalmente, arte de contar. La palabra deriva del griego *arithmētikē,* que combina dos palabras: *arithmos,* que significa ‘número’, y *technē,* que se refiere a un arte o habilidad.

Los números usados para contar son los *naturales* o *enteros positivos.* Se obtienen al añadir 1 al número anterior en una serie sin fin. Las distintas civilizaciones han desarrollado a lo largo de la historia diversos tipos de sistemas numéricos. Uno de los más comunes es el usado en las culturas modernas, donde los objetos se cuentan en grupos de 10. Se le denomina sistema en base 10 o *decimal.*

En el sistema en base 10, los enteros se representan mediante cifras cada una de las cuales representa potencias de 10. Tomemos el número 1.534 como ejemplo. Cada cifra de este número tiene su propio valor según el lugar que ocupa; estos valores son potencias de 10 crecientes hacia la izquierda. El valor de la primera cifra es en unidades (aquí 4 × 1); el de la segunda es 10 (aquí 3 × 10, o 30); el valor del tercer lugar es 10 × 10, o 100 (aquí 5 × 100, o 500), y el valor del cuarto lugar es 10 × 10 × 10, o 1.000 (aquí 1 × 1.000, o 1.000).

Definiciones fundamentales

La aritmética se ocupa del modo en que los números se pueden combinar mediante adición, sustracción, multiplicación y división. Aquí la palabra *número* se refiere también a los números negativos, irracionales, algebraicos y fracciones. Las propiedades aritméticas de la suma y la multiplicación y la propiedad distributiva son las mismas que las del álgebra.

Adición

La operación aritmética de la adición (suma) se indica con el signo más (+) y es una manera de contar utilizando incrementos mayores que 1. Por ejemplo, cuatro manzanas y cinco manzanas se pueden sumar poniéndolas juntas y contándolas a continuación de una en una hasta llegar a 9. La adición, sin embargo, hace posible calcular sumas más fácilmente. Las sumas más sencillas deben aprenderse de memoria. En aritmética, es posible sumar largas listas de números con más de una cifra si se aplican ciertas reglas que simplifican bastante la operación.

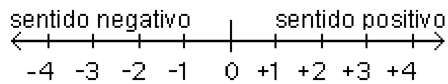
Sustracción

La operación aritmética de la sustracción (resta) se indica con el signo menos (-) y es la operación opuesta, o *inversa,* de la adición. De nuevo, se podría restar 23 de 66 contando al revés 23 veces empezando por 66 o eliminando 23 objetos de una colección de 66, hasta encontrar el resto, 43. Sin embargo, las reglas de la aritmética para la sustracción nos ofrecen un método más sencillo para encontrar la solución.

Números negativos

El cálculo de la sustracción aritmética no es difícil siempre que el sustraendo sea menor que el minuendo. Sin embargo, si el sustraendo es mayor que el minuendo, la única manera de encontrar un resultado para la resta es la introducción del concepto de números negativos.

La idea de los números negativos se comprende más fácilmente si primero se toman los números más familiares de la aritmética, los enteros positivos, y se colocan en una línea recta en orden creciente hacia el sentido positivo. Los números negativos se representan de la misma manera empezando desde 0 y creciendo en sentido contrario. La recta numérica que se muestra a continuación representa los números positivos y negativos:



Para poder trabajar adecuadamente con operaciones aritméticas que contengan números negativos, primero se ha de introducir el concepto del *valor absoluto.* Dado un número cualquiera, positivo o negativo, el valor absoluto de dicho número es su valor sin el signo. Así, el valor absoluto de +5 es 5, y el valor absoluto de -5 es también 5. En notación simbólica, el valor absoluto de un número cualquiera a se representa $|a|$ y queda definido así: el valor absoluto de a es a si a es positivo, y el valor absoluto de a es $-a$ si a es negativo.

Multiplicación

La operación aritmética de la multiplicación se indica con el signo por (×). Algunas veces se utiliza un punto para indicar la multiplicación de dos o más números, y otras se utilizan paréntesis. Por ejemplo, 3×4, $3 \cdot 4$ y $(3)(4)$ representan todos el producto de 3 por 4. La multiplicación es simplemente una suma repetida. La expresión 3×4 significa que 3 se ha de sumar consigo mismo 4 veces, o también que 4 se ha de sumar consigo mismo 3 veces. En ambos casos, la respuesta es la misma. Pero cuando se multiplican números con varias cifras estas sumas repetidas pueden ser bastante tediosas; sin embargo, la aritmética tiene procedimientos para simplificar estas operaciones.

División

La operación aritmética de la división es la operación recíproca o *inversa* de la multiplicación. Usando como ejemplo 12 dividido entre 4, la división se indica con el signo de dividir (12:4), una línea horizontal ($\frac{12}{4}$) o una raya inclinada (12/4).

La división es la operación aritmética usada para determinar el número de veces que un número dado contiene a otro. Por ejemplo, 12 contiene a 4 tres veces; por eso 12 dividido entre 4 es 3, o $\frac{12}{4}$ es 3.

La mayor parte de las divisiones se pueden calcular a simple vista, pero en muchos casos es más complicado y se necesita un procedimiento conocido como división larga.

Teoría de los divisores

Antes de pasar a las fracciones, se deben mencionar algunos detalles sobre otras clases de números. Un número par es aquél que es divisible por 2. Un número impar es aquél que no es divisible por 2. Un número primo es cualquier entero positivo mayor que 1 y que sólo es divisible por sí mismo y por 1. Algunos ejemplos de números primos son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19… El único número primo par es el 2. Los enteros que no son primos se denominan *compuestos,* y todos se pueden expresar como producto de números primos.

Teorema fundamental de la aritmética

"Todo entero mayor que 1 y que no sea un número primo es igual al producto de un y sólo un conjunto de números primos". Este teorema fue demostrado por primera vez por el matemático alemán Carl Friedrich Gauss. Dado un cierto número, por ejemplo 14, el teorema dice que se puede escribir de manera única como el producto de sus factores primos, en este caso 14 = $2 \cdot 7$. De la misma manera, $50 = 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2 \cdot 5^2$. El menor múltiplo y el mayor divisor común a varios números se pueden calcular utilizando sus descomposiciones en factores primos.

Mínimo común múltiplo

El mínimo común múltiplo (m.c.m.) de dos o más números es el menor número que puede ser dividido exactamente por todos y cada uno de ellos. El m.c.m. contiene el mayor número de todos los factores primos que aparecen en cada uno de los números dados. Por ejemplo, para encontrar el m.c.m. de tres números 27, 63 y 75, primero se descomponen en factores: $27 = 3^3$, $63 = 3^2 \cdot 7$, y $75 = 3 \cdot 5^2$. El m.c.m. debe contener al menos los factores 3^3, 7 y 5^2; por tanto, $3^3 \cdot 7 \cdot 5^2 = 4.725$ es el menor número que se puede dividir exactamente entre 27, 63 y 75.

Máximo común divisor

El mayor factor común a un conjunto dado de números es su máximo común divisor (m.c.d.). Por ejemplo, dados 9, 15 y 27, el m.c.d. es 3, que se encuentra fácilmente examinando la descomposición en factores de cada uno de los números: $9 = 3^2$, $15 = 3 \cdot 5$, $27 = 3^3$; el único factor que aparece en los tres números es 3.

Fracciones

Los números que representan partes de un todo se denominan números racionales, fracciones o quebrados. En general, las fracciones se pueden expresar como el cociente de dos números enteros *a* y *b:*

$$\frac{a \text{ (numerador)}}{b \text{ (denominador)}}$$

Una fracción está en su forma reducida o canónica si el numerador y el denominador no tienen un factor común. Por ejemplo, $\frac{6}{8}$ no está en su forma reducida pues ambos, 6 y 8, son divisibles por 2: $\frac{6}{8}$ = (2· 3)/ (2· 4); sin embargo, $\frac{3}{4}$ es una fracción en su forma canónica.

Existen dos tipos de fracciones, propias e impropias. Una *fracción propia* es aquella en la que el numerador es menor que el denominador; $\frac{2}{3}$, $-\frac{7}{8}$ y $\frac{16}{19}$ son todas ellas fracciones propias. Una *fracción impropia* es aquella en que el numerador es mayor que el denominador; $\frac{3}{2}$, $-\frac{8}{4}$ y $\frac{7}{3}$ son fracciones impropias. Las fracciones impropias se pueden convertir en números mixtos o en enteros (por ejemplo, $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ $-\frac{8}{4} = -2$, y $\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$) si se divide el numerador por el denominador y el resto se expresa como una fracción del denominador.

Decimales

El concepto de valores posicionales se puede extender para incluir a las fracciones. En vez de escribir $\frac{2}{10}$, o dos décimos, se puede utilizar una coma decimal (,) de manera que 0,2 representa también a la fracción. Del mismo modo que las cifras a la izquierda de la coma representan las unidades, decenas, centenas…, aquéllas a la derecha de la coma representan los lugares de las décimas ($\frac{1}{10}$), centésimas ($\frac{1}{100}$), milésimas (1/1.000) y así sucesivamente. Estos valores posicionales siguen siendo potencias de 10, que se escriben como 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}… En general, un número como 5.428,632 se denomina quebrado o *fracción decimal,* y 0,632 representa

$$\underset{\text{décimas}}{6(10^{-1})} + \underset{\text{centésimas}}{3(10^{-2})} + \underset{\text{milésimas}}{2(10^{-3})}$$

Este número se lee como: "cinco mil cuatrocientos veintiocho coma seiscientos treinta y dos".

<u>GEOMETRIA</u>

Geometría (del griego *geō,* 'tierra'; *metrein,* 'medir'), rama de las matemáticas que se ocupa de las propiedades del espacio. En su forma más elemental, la geometría se preocupa de problemas métricos como el cálculo del área y diámetro de figuras planas y de la superficie y volumen de cuerpos sólidos. Otros campos de la geometría son la geometría analítica, geometría descriptiva, topología, geometría de espacios con cuatro o más dimensiones, geometría fractal, y geometría no euclídea.

Geometría demostrativa primitiva

El origen del término geometría es una descripción precisa del trabajo de los primeros geómetras, que se interesaban en problemas como la medida del tamaño de los campos o el trazado de ángulos rectos para las esquinas de los edificios. Este tipo de geometría empírica, que floreció en el Antiguo Egipto, Sumeria y Babilonia, fue refinado y sistematizado por los griegos. En el siglo VI a.C. el matemático Pitágoras colocó la piedra angular de la geometría científica al demostrar que las diversas leyes arbitrarias e inconexas de la geometría empírica se pueden deducir como conclusiones lógicas de un número limitado de axiomas, o postulados. Estos postulados fueron considerados por Pitágoras y sus discípulos como verdades evidentes; sin embargo, en el pensamiento matemático moderno se consideran como un conjunto de supuestos útiles pero arbitrarios.

Un ejemplo típico de los postulados desarrollados y aceptados por los matemáticos griegos es la siguiente afirmación: "una línea recta es la distancia más corta entre dos puntos". Un conjunto de teoremas sobre las propiedades de puntos, líneas, ángulos y planos se puede deducir lógicamente a partir de estos axiomas. Entre estos teoremas se encuentran: "la suma de los ángulos de cualquier triángulo es igual a la suma de dos ángulos rectos", y "el cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados" (conocido como teorema de Pitágoras). La geometría demostrativa de los griegos, que se ocupaba de polígonos y círculos y de sus correspondientes figuras tridimensionales, fue mostrada rigurosamente por el matemático griego Euclides, en su libro *Los elementos.* El texto de Euclides, a pesar de sus imperfecciones, ha servido como libro de texto básico de geometría hasta casi nuestros días.

Primeros problemas geométricos

Los griegos introdujeron los problemas de construcción, en los que cierta línea o figura debe ser construida utilizando sólo una regla de borde recto y un compás. Ejemplos sencillos son la construcción de una línea recta dos veces más larga que una recta dada, o de una recta que divide un ángulo dado en dos ángulos iguales. Tres famosos problemas de construcción que datan de la época griega se resistieron al esfuerzo de muchas generaciones de matemáticos que intentaron resolverlos: la duplicación del cubo (construir un cubo de volumen doble al de un determinado cubo), la cuadratura del círculo (construir un cuadrado con área igual a un círculo determinado) y la trisección del ángulo (dividir un ángulo dado en tres partes iguales). Ninguna de estas construcciones es posible con la regla y el compás, y la imposibilidad de la cuadratura del círculo no fue finalmente demostrada hasta 1882.

Los griegos, y en particular Apolonio de Perga, estudiaron la familia de curvas conocidas como cónicas y descubrieron muchas de sus propiedades fundamentales. Las cónicas son importantes en muchos campos de las ciencias físicas; por ejemplo, las órbitas de los planetas alrededor del Sol son fundamentalmente cónicas.

Arquímedes, uno de los grandes científicos griegos, hizo un considerable número de aportaciones a la geometría. Inventó formas de medir el área de ciertas figuras curvas así como la superficie y el volumen de sólidos limitados por superficies curvas, como paraboloides y cilindros. También elaboró un método para calcular una aproximación del valor de pi (π), la proporción entre el diámetro y la circunferencia de un círculo y estableció que este número estaba entre 3 10/70 y 3 10/71.

Geometría analítica

La geometría avanzó muy poco desde el final de la era griega hasta la edad media. El siguiente paso importante en esta ciencia lo dio el filósofo y matemático francés René Descartes, cuyo tratado *El Discurso del Método,* publicado en 1637, hizo época. Este trabajo fraguó una conexión entre la geometría y el álgebra al demostrar cómo aplicar los métodos de una disciplina en la otra. Éste es un fundamento de la geometría analítica, en la que las figuras se representan mediante expresiones algebraicas, sujeto subyacente en la mayor parte de la geometría moderna.

Otro desarrollo importante del siglo XVII fue la investigación de las propiedades de las figuras geométricas que no varían cuando las figuras son proyectadas de un plano a otro. Un ejemplo sencillo de geometría proyectiva queda ilustrado en la figura 1. Si los puntos *A, B, C* y *a, b, c* se colocan en cualquier posición de una cónica, por ejemplo una circunferencia, y dichos puntos se unen *A* con *b* y *c, B* con *c* y *a,* y *C* con *b* y *a,* los tres puntos de las intersecciones de dichas líneas están en una recta. De la misma manera, si se dibujan seis tangentes cualesquiera a una cónica, como en la figura 2, y se trazan rectas que unan dos intersecciones opuestas de las tangentes, estas líneas se cortan en un punto único. Este teorema se denomina proyectivo, pues es cierto para todas las cónicas, y éstas se pueden transformar de una a otra utilizando las proyecciones apropiadas, como en la figura 3, que muestra que la proyección de una circunferencia es una elipse en el otro plano.

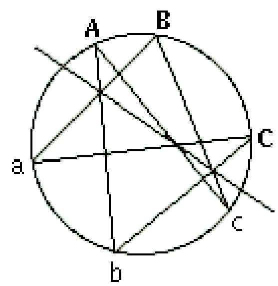


Figura 1

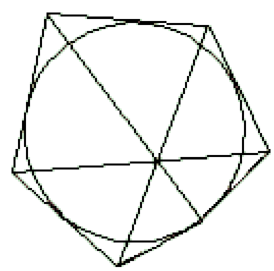


Figura 2

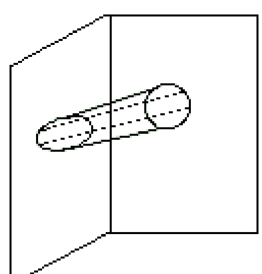


Figura 3

Modernos avances

La geometría sufrió un cambio radical de dirección en el siglo XIX. Los matemáticos Carl Friedrich Gauss, Nikolái Lobachevski, y János Bolyai, trabajando por separado, desarrollaron sistemas coherentes de geometría no euclídea. Estos sistemas aparecieron a partir de los trabajos sobre el llamado "postulado paralelo" de Euclides, al proponer alternativas que generan modelos extraños y no intuitivos de espacio, aunque, eso sí, coherentes.

Casi al mismo tiempo, el matemático británico Arthur Cayley desarrolló la geometría para espacios con más de tres dimensiones. Imaginemos que una línea es un espacio unidimensional. Si cada uno de los puntos de la línea se sustituye por una línea perpendicular a ella, se crea un plano, o espacio bidimensional. De la misma manera, si cada punto del plano se sustituye por una línea perpendicular a él, se genera un espacio tridimensional. Yendo más lejos, si cada punto del espacio tridimensional se sustituye por una línea perpendicular, tendremos un espacio tetradimensional. Aunque éste es físicamente imposible, e inimaginable, es conceptualmente sólido. El uso de conceptos con más de tres dimensiones tiene un importante número de aplicaciones en las ciencias físicas, en particular en el desarrollo de teorías de la relatividad.

También se han utilizado métodos analíticos para estudiar las figuras geométricas regulares en cuatro o más dimensiones y compararlas con figuras similares en tres o menos dimensiones. Esta geometría se conoce como geometría estructural. Un ejemplo sencillo de este enfoque de la geometría es la definición de la figura geométrica más sencilla que se puede dibujar en espacios con cero, una, dos, tres, cuatro o más dimensiones. En los cuatro primeros casos, las figuras son los bien conocidos punto, línea, triángulo y tetraedro respectivamente. En el espacio de cuatro dimensiones, se puede demostrar que la figura más sencilla está compuesta por cinco puntos como vértices, diez segmentos como aristas, diez triángulos como caras y cinco tetraedros. El tetraedro, analizado de la misma manera, está compuesto por cuatro vértices, seis segmentos y cuatro triángulos.

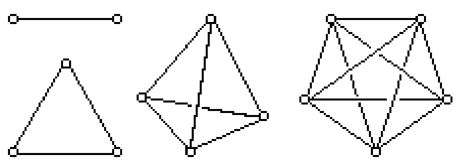


Figura 4

Otro concepto dimensional, el de dimensiones fraccionarias, apareció en el siglo XIX. En la década de 1970 el concepto se desarrolló como la geometría fractal.

GEOMETRIA ANALITICA

Geometría analítica, rama de la geometría en la que las líneas rectas, las curvas y las figuras geométricas se representan mediante expresiones algebraicas y numéricas usando un conjunto de ejes y coordenadas. Cualquier punto del plano se puede localizar con respecto a un par de ejes perpendiculares dando las distancias del punto a cada uno de los ejes. En la figura 1, el punto *A* está a 1 unidad del eje vertical (*y*) y a 4 unidades del horizontal (*x*). Las coordenadas del punto *A* son por tanto 1 y 4, y el punto queda fijado dando las expresiones $x = 1$, $y = 4$. Los valores positivos de *x* están situados a la derecha del eje *y,* y los negativos a la izquierda; los valores positivos de *y* están por encima del eje *x* y los negativos por debajo. Así, el punto *B* de la figura 1 tiene por coordenadas $x = 5$, $y = 0$. En un espacio tridimensional, los puntos se pueden localizar de manera similar utilizando tres ejes, el tercero de los cuales, normalmente llamado *z*, es perpendicular a los otros dos en el punto de intersección, también llamado *origen.*

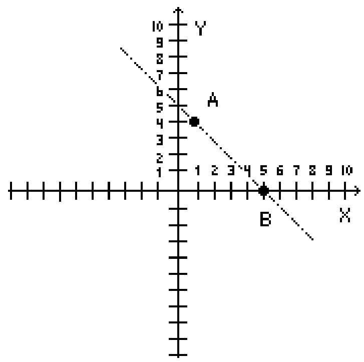


Figura 1

En general, una línea recta se puede representar siempre utilizando una ecuación lineal en dos variables, *x* e *y,* de la forma $ax + by + c = 0$. De la misma manera, se pueden encontrar fórmulas para la circunferencia, la elipse y otras cónicas y curvas regulares. La geometría analítica se ocupa de dos tipos clásicos de problemas. El primero es: dada la descripción geométrica de un conjunto de puntos, encontrar la ecuación algebraica que cumplen dichos puntos. Siguiendo con el ejemplo anterior, todos los puntos que pertenecen a la línea recta que pasa por *A* y *B* cumplen la ecuación lineal $x + y = 5$; en general, $ax + by = c$. El segundo tipo de problema es: dada una expresión algebraica, describir en términos geométricos el lugar geométrico de los puntos que cumplen dicha expresión. Por ejemplo, una circunferencia de radio 3 y con su centro en el origen es el lugar geométrico de los puntos que satisfacen $x2 + y2 = 9$. Usando ecuaciones como éstas, es posible resolver algebraicamente esos problemas geométricos de construcción, como la bisección de un ángulo o de una recta dados, encontrar la perpendicular a una recta que pasa por cierto punto, o dibujar una circunferencia que pasa por tres puntos dados que no estén en línea recta. La geometría analítica ha tenido gran importancia en el desarrollo de las matemáticas pues ha unificado los conceptos de análisis (relaciones numéricas) y geometría (relaciones espaciales). El estudio de la geometría no euclídea y de las geometrías de espacios con más de tres dimensiones no habría sido posible sin un tratamiento analítico. Del mismo modo, las técnicas de la geometría analítica, que hacen posible la representación de números y expresiones algebraicas en términos geométricos, han ayudado al cálculo, la teoría de funciones y otros problemas de las matemáticas avanzadas.

ALGEBRA

Álgebra, rama de las matemáticas en la que se usan letras para representar relaciones aritméticas. Al igual que en la aritmética, las operaciones fundamentales del álgebra son adición, sustracción, multiplicación, división y cálculo de raíces. La aritmética, sin embargo, no es capaz de generalizar las relaciones matemáticas, como el teorema de Pitágoras, que dice que en un triángulo rectángulo el área del cuadrado de lado la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados de lado los catetos. La aritmética sólo da casos particulares de esta relación (por ejemplo, 3, 4 y 5, ya que $32 + 42 = 52$). El álgebra, por el contrario, puede dar una generalización que cumple las condiciones del teorema: $a2 + b2 = c2$. Un número multiplicado por sí mismo se denomina *cuadrado,* y se representa con el superíndice 2. Por ejemplo, la notación de 3×3 es 32; de la misma manera, $a \times a$ es igual que $a2$.

El álgebra clásica, que se ocupa de resolver ecuaciones, utiliza símbolos en vez de números específicos y operaciones aritméticas para determinar cómo usar dichos símbolos. El álgebra moderna ha evolucionado desde el álgebra clásica al poner más atención en las estructuras matemáticas. Los matemáticos consideran al álgebra moderna como un conjunto de objetos con reglas que los conectan o relacionan. Así, en su forma más general, una buena definición de álgebra es la que dice que el álgebra es el idioma de las matemáticas.

Historia

La historia del álgebra comenzó en el antiguo Egipto y Babilonia, donde fueron capaces de resolver ecuaciones *lineales* ($ax = b$) y *cuadráticas* ($ax^2 + bx = c$), así como *ecuaciones indeterminadas* como $x^2 + y^2 = z^2$, con varias incógnitas. Los antiguos babilonios resolvían cualquier ecuación cuadrática empleando esencialmente los mismos métodos que hoy se enseñan. También fueron capaces de resolver algunas ecuaciones indeterminadas.

Los matemáticos alejandrinos Herón y Diofante continuaron con la tradición de Egipto y Babilonia, aunque el libro *Las aritméticas* de Diofante es de bastante más nivel y presenta muchas soluciones sorprendentes para ecuaciones indeterminadas difíciles. Esta antigua sabiduría sobre resolución de ecuaciones encontró, a su vez, acogida en el mundo islámico, en donde se le llamó "ciencia de reducción y equilibrio". (La palabra árabe *al-jabru* que significa 'reducción', es el origen de la palabra *álgebra*). En el siglo IX, el matemático al-Jwārizmī; escribió uno de los primeros libros árabes de álgebra, una presentación sistemática de la teoría fundamental de ecuaciones, con ejemplos y demostraciones incluidas. A finales del siglo IX, el matemático egipcio Abu Kamil enunció y demostró las leyes fundamentales e identidades del álgebra, y resolvió problemas tan complicados como encontrar las x, y, z que cumplen $x + y + z = 10$, $x^2 + y^2 = z^2$, y $xz = y^2$.

En las civilizaciones antiguas se escribían las expresiones algebraicas utilizando abreviaturas sólo ocasionalmente; sin embargo, en la edad media, los matemáticos árabes fueron capaces de describir cualquier potencia de la incógnita x, y desarrollaron el álgebra fundamental de los polinomios, aunque sin usar los símbolos modernos. Este álgebra incluía multiplicar, dividir y extraer raíces cuadradas de polinomios, así como el conocimiento del teorema del binomio. El matemático, poeta y astrónomo persa Omar Khayyam mostró cómo expresar las raíces de ecuaciones cúbicas utilizando los segmentos obtenidos por intersección de secciones cónicas, aunque no fue capaz de encontrar una fórmula para las raíces. La traducción al latín del *Álgebra* de al-Jwārizmī fue publicada en el siglo XII. A principios del siglo XIII, el matemático italiano Leonardo Fibonacci consiguió encontrar una aproximación cercana a la solución de la ecuación cúbica $x^3 + 2x^2 + cx = d$. Fibonacci había viajado a países árabes, por lo que con seguridad utilizó el método arábigo de aproximaciones sucesivas.

A principios del siglo XVI los matemáticos italianos Scipione del Ferro, Tartaglia y Gerolamo Cardano resolvieron la ecuación cúbica general en función de las constantes que aparecen en la ecuación. Ludovico Ferrari, alumno de Cardano, pronto encontró la solución exacta para la ecuación de cuarto grado y, como consecuencia, ciertos matemáticos de los siglos posteriores intentaron encontrar la fórmula de las raíces de las ecuaciones de quinto grado y superior. Sin embargo, a principios del siglo XIX el matemático noruego Niels Abel y el francés Évariste Galois demostraron la inexistencia de dicha fórmula.

Un avance importante en el álgebra fue la introducción, en el siglo XVI, de símbolos para las incógnitas y para las operaciones y potencias algebraicas. Debido a este avance, el Libro III de la *Geometría* (1637), escrito por el matemático y filósofo francés René Descartes se parece bastante a un texto moderno de álgebra. Sin embargo, la contribución más importante de Descartes a las matemáticas fue el descubrimiento de la geometría analítica, que reduce la resolución de problemas geométricos a la resolución de problemas algebraicos. Su libro de geometría contiene también los fundamentos de un curso de teoría de ecuaciones, incluyendo lo que el propio Descartes llamó la *regla de los signos* para contar el número de raíces verdaderas (positivas) y falsas (negativas) de una ecuación. Durante el siglo XVIII se continuó trabajando en la teoría de ecuaciones y en 1799 el matemático alemán Carl Friedrich Gauss publicó la demostración de que toda ecuación polinómica tiene al menos una raíz en el plano complejo (*véase* Número: *Números complejos*).

En los tiempos de Gauss, el álgebra había entrado en su etapa moderna. El foco de atención se trasladó de las ecuaciones polinómicas al estudio de la estructura de sistemas matemáticos abstractos, cuyos axiomas estaban basados en el comportamiento de objetos matemáticos, como los números complejos, que los matemáticos habían encontrado al estudiar las ecuaciones polinómicas. Dos ejemplos de dichos sistemas son los grupos y las cuaternas, que comparten algunas de las propiedades de los sistemas numéricos, aunque también difieren de ellos de manera sustancial. Los grupos comenzaron como sistemas de permutaciones y combinaciones (*véase* Combinatoria) de las raíces de polinomios, pero evolucionaron para llegar a ser uno de los más importantes conceptos unificadores de las matemáticas en el siglo XIX. Los matemáticos franceses Galois y Augustin Cauchy, el británico Arthur Cayley y los noruegos Niels Abel y Sophus Lie hicieron importantes contribuciones a su estudio. Las cuaternas fueron descubiertas por el matemático y astrónomo irlandés William Rowan Hamilton, quien desarrolló la aritmética de los números complejos para las cuaternas; mientras que los números complejos son de la forma $a + bi$, las cuaternas son de la forma $a + bi + cj + dk$.

Después del descubrimiento de Hamilton el matemático alemán Hermann Grassmann empezó a investigar los vectores. A pesar de su carácter abstracto, el físico estadounidense J. W. Gibbs encontró en el álgebra vectorial un sistema de gran utilidad para los físicos, del mismo modo que Hamilton había hecho con las cuaternas. La amplia influencia de este enfoque abstracto llevó a George Boole a escribir *Investigación sobre las leyes del pensamiento* (1854), un tratamiento algebraico de la lógica básica. Desde entonces, el álgebra moderna —también llamada álgebra abstracta— ha seguido evolucionando; se han obtenido resultados importantes y se le han encontrado aplicaciones en todas las ramas de las matemáticas y en muchas otras ciencias.

Símbolos y términos específicos

Entre los símbolos algebraicos se encuentran números, letras y signos que representan las diversas operaciones aritméticas. Los números son, por supuesto, constantes, pero las letras pueden representar tanto constantes como variables. Las primeras letras del alfabeto se usan para representar constantes y las últimas para variables.

Operaciones y agrupación de símbolos

La agrupación de los símbolos algebraicos y la secuencia de las operaciones aritméticas se basa en los símbolos de agrupación, que garantizan la claridad de lectura del lenguaje algebraico. Entre los símbolos de agrupación se encuentran los paréntesis ( ), corchetes [ ], llaves { } y rayas horizontales —también llamadas vínculos— que suelen usarse para representar la división y las raíces, como en el siguiente ejemplo:

$$\frac{ax+b}{c-dy} \qquad \sqrt{b^2-4ac}$$

Los símbolos de las operaciones básicas son bien conocidos de la aritmética: adición (+), sustracción (-), multiplicación (×) y división (:). En el caso de la multiplicación, el signo ‘×’ normalmente se omite o se sustituye por un punto, como en $a \cdot b$. Un grupo de símbolos contiguos, como *abc,* representa el producto de *a, b* y *c.* La división se indica normalmente mediante rayas horizontales. Una raya oblicua, o virgulilla, también se usa para separar el numerador, a la izquierda de la raya, del denominador, a la derecha, en las fracciones. Hay que tener cuidado de agrupar los términos apropiadamente. Por ejemplo, $ax + b/c - dy$ indica que ax y dy son términos separados, lo mismo que b/c, mientras que $(ax + b)/(c - dy)$ representa la fracción:

$$\frac{ax+b}{c-dy}$$

Prioridad de las operaciones

Primero se hacen las multiplicaciones, después las divisiones, seguidas de las sumas y las restas. Los símbolos de agrupación indican el orden en que se han de realizar las operaciones: se hacen primero todas las operaciones dentro de un mismo grupo, comenzando por el más interno. Por ejemplo:

$$\left\{2\left[3+(6\cdot 5+2)\right]\right\} = \left\{2\left[3+(30+2)\right]\right\} =$$
$$\left\{2\left[3+(32)\right]\right\} = \left\{2\left[35\right]\right\} = 70$$

Otras definiciones

Cualquier expresión que incluya la relación de igualdad (=) se llama *ecuación.* Una ecuación se denomina *identidad* si la igualdad se cumple para cualquier valor de las variables; si la ecuación se cumple para ciertos valores de las variables pero no para otros, la ecuación es *condicional.* Un *término* es una expresión algebraica que sólo contiene productos de constantes y variables; $2x$, $-a$, $\frac{1}{4}s4x$, $x2(2zy)3$ son algunos ejemplos de términos. La parte numérica de un término se denomina *coeficiente.* Los coeficientes de cada uno de los ejemplos anteriores son 2, -1, $\frac{1}{4}$ y 8 (el último término se puede escribir como $8x2(zy)3$).

Una expresión que contiene un solo término se denomina *monomio,* dos términos, *binomio* y tres términos, *trinomio.* Un *polinomio* es una suma (o diferencia) finita de términos. Por ejemplo, un polinomio de n-ésimo grado en su forma general se expresa como:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

En este contexto, el *grado* es el mayor exponente de las variables en un polinomio. Por ejemplo, si el mayor exponente de la variable es 3, como en $ax3 + bx2 + cx$, el polinomio es de tercer grado. Del mismo modo, la expresión $xn + xn\text{-}1 + xn\text{-}2$ es de n-ésimo grado.

Una *ecuación lineal* en una variable es una ecuación polinómica de primer grado, es decir, una ecuación de la forma $ax + b = 0$. Se les llama ecuaciones lineales porque representan la fórmula de una línea recta en la geometría analítica.

Una *ecuación cuadrática* en una variable es una ecuación polinómica de segundo grado, es decir, de la forma $ax2 + bx + c = 0$.

Un *número primo* es un entero (número natural) que sólo se puede dividir exactamente por sí mismo y por 1. Así, 2, 3, 5, 7, 11 y 13 son todos números primos.

Las *potencias* de un número se obtienen mediante sucesivas multiplicaciones del número por sí mismo. El término *a* elevado a la tercera potencia, por ejemplo, se puede expresar como $a \cdot a \cdot a$ o a^3.

Los *factores primos* de un cierto número son aquellos factores en los que éste se puede descomponer de manera que el número se puede expresar sólo como el producto de números primos y sus potencias. Por ejemplo, los factores primos de 15 son 3 y 5. Del mismo modo, como $60 = 2^2 \times 3 \times 5$, los factores primos de 60 son 2, 3 y 5.

Operaciones con polinomios

Al hacer operaciones con polinomios, se asume que se cumplen las mismas propiedades que para la aritmética numérica. En aritmética, los números usados son el conjunto de los números racionales. La aritmética, por sí sola, no puede ir más lejos, pero el álgebra y la geometría pueden incluir números irracionales, como la raíz cuadrada de 2 y números complejos. El conjunto de todos los números racionales e irracionales constituye el conjunto de los números reales.

Propiedades de la adición

A1. La suma de dos números reales *a* y *b* cualesquiera es otro número real que se escribe $a + b$. Los números reales son uniformes para las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división; esto quiere decir que al realizar una de estas operaciones con números reales el resultado es otro número real.

A2. Cualquiera que sea la forma en que se agrupan los términos de la adición, el resultado de la suma es siempre el mismo: $(a + b) + c = a + (b + c)$. Es la llamada *propiedad asociativa de la adición.*

A3. Dado un número real *a* cualquiera, existe el número real cero (0) conocido como *elemento neutro de la adición,* tal que $a + 0 = 0 + a = a$.

A4. Dado un número real *a* cualquiera, existe otro número real $(-a)$, llamado *elemento simétrico* de *a* (o elemento recíproco de la suma), tal que $a + (-a) = 0$.

A5. Cualquiera que sea el orden en que se realiza la adición, la suma es siempre la misma: $a + b = b + a$. Es la llamada *propiedad conmutativa de la adición.*

Cualquier conjunto de números que cumpla las cuatro primeras propiedades se dice que forma un *grupo*. Si además el conjunto cumple A5, se dice que es un grupo *abeliano* o *conmutativo.*

Propiedades de la multiplicación

Para la multiplicación se cumplen propiedades similares a las de la adición. Sin embargo, hay que prestar especial atención a los elementos neutro y recíproco, M3 y M4.

M1. El producto de dos números reales *a* y *b* es otro número real, que se escribe $a \cdot b$ o ab.

M2. Cualquiera que sea la forma de agrupar los términos de la multiplicación, el producto es siempre el mismo: $(ab)c = a(bc)$. Es la llamada *propiedad asociativa de la multiplicación.*

M3. Dado un número real *a* cualquiera, existe el número real uno (1) llamado *elemento neutro de la multiplicación,* tal que $a(1) = 1(a) = a$.

M4. Dado un número real *a* distinto de cero, existe otro número (a^{-1} o $1/a$), llamado *elemento inverso* (o elemento recíproco de la multiplicación), para el que $a(a^{-1}) = (a^{-1})a = 1$.

M5. Cualquiera que sea el orden en que se realiza la multiplicación, el producto es siempre el mismo: $ab = ba$. Es la llamada *propiedad conmutativa de la multiplicación.*

Un conjunto de elementos que cumpla estas cinco propiedades se dice que es un grupo *abeliano,* o *conmutativo,* para la multiplicación. El conjunto de los números reales, excluyendo el cero —pues la división por cero no está definida— es un grupo conmutativo para la multiplicación.

Propiedad distributiva

Otra propiedad importante del conjunto de los números reales relaciona la adición y la multiplicación de la forma siguiente:

D1. $a(b + c) = ab + ac$

D2. $(b + c)a = ba + ca$

Un conjunto de elementos con una relación de igualdad, en el que se definen dos operaciones (como la adición y la multiplicación) que cumplan las propiedades de la adición, A1 a A5, las propiedades de la multiplicación, M1 a M5, y la propiedad distributiva, D1 y D2, constituye un cuerpo conmutativo.

Multiplicación de polinomios

El siguiente ejemplo es el producto de un monomio por un binomio:

$$(ax + b)(cx^2) = acx^3 + bcx^2$$

Este mismo principio —multiplicar cada término del primer polinomio por cada uno del segundo— se puede ampliar directamente a polinomios con cualquier número de términos. Por ejemplo, el producto de un binomio y un trinomio se hace de la siguiente manera:

$$(ax^3 + bx^2 - cx)(dx + e) = adx^4 + aex^3 + bdx^3 + bex^2 - cdx^2 - cex$$

Una vez hechas estas operaciones, todos los términos de un mismo grado se han de agrupar, siempre que sea posible, para simplificar la expresión:

$$= adx^4 + (ae + bd)x^3 + (be - cd)x^2 - cex$$

Factorización de polinomios

Dada una expresión algebraica complicada, resulta útil, por lo general, el descomponerla en un producto de varios términos más sencillos. Por ejemplo, $2x^3 + 8x^2y$ se puede factorizar, o reescribir, como $2x^2(x + 4y)$. El encontrar los factores de un determinado polinomio puede ser materia de simple inspección o se puede necesitar el uso de tanteos sucesivos. Ciertos polinomios, sin embargo, no se pueden factorizar utilizando coeficientes reales y son llamados *polinomios primos.*

Algunas factorizaciones conocidas aparecen en los ejemplos siguientes.

Trinomios de la forma:

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)(x + y) = (x + y)^2$$
$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)(x - y) = (x - y)^2$$
$$25x^2 + 20xy + 4y^2 = (5x + 2y)^2$$

Diferencia de cuadrados:

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$
$$25x^2 - 16y^2 = (5x + 4y)(5x - 4y)$$

Trinomios de la forma:

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$
$$x^2 + 7x + 10 = (x + 5)(x + 2)$$

Sumas y diferencias de cubos:

$$x^3 \pm y^3 = (x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2)$$
$$x^3 + 8y^3 = (x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)$$

Para factorizar suele ser útil agrupar primero; aquellos términos que sean similares se agrupan como en el siguiente ejemplo, cuando sea posible:

$$2x^2z + x^2y - 6xz - 3xy = x^2(2z + y) -$$
$$3x(2z + y) =$$
$$(x^2 - 3x)(2z + y) =$$
$$x(x - 3)(2z + y)$$

Máximo común divisor

Dado un polinomio, suele ser importante determinar el mayor factor común a todos los términos del polinomio. Por ejemplo, en la expresión $9x^3 + 18x^2$, el número 9 es un factor de ambos términos, lo mismo que x^2. Tras su factorización se obtiene $9x^2(x + 2)$, y $9x^2$ es el máximo común divisor de todos los términos del polinomio original (en este caso un binomio). De la misma manera, en el trinomio $6a^2x^3 + 9abx + 15cx^2$, el número 3 es el mayor submúltiplo común a 6, 9 y 15, y x es el mayor factor de la variable común a los tres términos. Por tanto, el máximo común divisor del trinomio es $3x$.

Mínimo común múltiplo

Encontrar el mínimo común múltiplo es útil para poder hacer ciertas operaciones con fracciones algebraicas. El procedimiento es similar al usado para realizar estas operaciones con fracciones ordinarias en aritmética. Para poder combinar dos o más fracciones, los denominadores deben ser iguales; la forma más directa de obtener un denominador común es multiplicar todos los denominadores entre sí. Por ejemplo:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{d} + \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{b} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Pero puede ocurrir que *bd* no sea el *mínimo* común denominador. Por ejemplo:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2 \cdot 6}{3 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3}{6 \cdot 3} = \frac{12 + 3}{18} = \frac{15}{18}$$

Sin embargo, 18 es sólo uno de los posibles denominadores comunes; el mínimo común denominador es 6:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

En álgebra, el problema de encontrar el mínimo común múltiplo es similar. Dadas varias expresiones, su mínimo común múltiplo es aquella expresión con el menor grado y los menores coeficientes que se puede dividir exactamente por cada una de ellas. Así, para encontrar un múltiplo común a los términos $2x^2y$, $30x^2y^2$, $9ay^3$, basta con multiplicar las tres expresiones entre sí y es fácil demostrar que $(2x^2y)(30x^2y^2)(9ay^3)$ se puede dividir exactamente por cada uno de los tres términos; sin embargo, éste no es el menor de los múltiplos comunes. Para determinar cuál es el mínimo, cada uno de los términos se ha de descomponer en sus factores primos. Para los coeficientes numéricos, 2, 30 y 9, los factores primos son 2, $2 \cdot 3 \cdot 5$ y $3 \cdot 3$ respectivamente; el mínimo común múltiplo de los coeficientes debe ser por tanto $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$, o 90, que es el producto de la mínima cantidad de factores necesaria para obtener un múltiplo común. De la misma manera, como la constante *a* sólo aparece una vez, debe ser un factor. En cuanto a las variables, se necesitan x^2 e y^3; por tanto, el mínimo común múltiplo de los tres términos es $90ax^2y^3$. Esta expresión se puede dividir exactamente por cada uno de los términos.

Resolución de ecuaciones

Dada una ecuación, el álgebra se ocupa de encontrar sus soluciones siguiendo el concepto general de identidad $a = a$. Siempre que se apliquen las mismas operaciones aritméticas o algebraicas en ambos lados de la ecuación la igualdad se mantiene inalterada. La estrategia básica es despejar la incógnita en un lado de la igualdad y la solución será el otro lado. Por ejemplo, para resolver la siguiente ecuación lineal con una incógnita

$$5x + 6 = 3x + 12$$

los términos que contienen la variable se despejan en un lado y las constantes en el otro. El término $3x$ se puede eliminar del lado derecho mediante sustracción; $3x$ se ha de restar del lado izquierdo al mismo tiempo:

$$\begin{array}{rcr} 5x + 6 & = & 3x + 12 \\ -3x \quad & & -3x \quad\;\; \\ \hline 2x + 6 & = & 12 \end{array}$$

Después se resta el número 6 de ambos lados:

$$\begin{array}{rcr} 2x+6 & = & 12 \\ -6 & & -6 \\ \hline 2x & = & 6 \end{array}$$

Para despejar la *x* en el lado izquierdo se dividen ambos lados de la ecuación por 2:

$$\frac{2x}{2} = \frac{6}{2}$$

y la solución es por tanto: $x = 3$. Para comprobar este resultado basta con sustituir el valor $x = 3$ en la ecuación original:

$$\begin{aligned} 5x + 6 &= 3x + 12 \\ 5(3) + 6 &= 3(3) + 12 \\ 15 + 6 &= 9 + 12 \\ 21 &= 21 \end{aligned}$$

Resolución de ecuaciones cuadráticas

Dada una ecuación de segundo grado o cuadrática en su forma general:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

hay diversas posibilidades para resolverla dependiendo de la naturaleza específica de la ecuación en cuestión. Si la ecuación se puede factorizar, la solución es inmediata. Por ejemplo:

$$x^2 - 3x = 10$$

Primero se escribe la ecuación en su forma general

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

que se puede factorizar como:

$$(x - 5)(x + 2) = 0$$

La igualdad sólo se cumple cuando uno de los factores es cero, es decir, cuando $x = 5$ o $x = -2$. Éstas son las soluciones de la ecuación, que de nuevo se pueden verificar mediante sustitución.

Si a primera vista no se encuentra un modo directo de factorizar la ecuación, puede existir otra alternativa. Por ejemplo, en la ecuación

$$4x^2 + 12x = 7$$

la expresión $4x^2 + 12x$ se podría factorizar como un cuadrado perfecto si fuera $4x^2 + 12x + 9$, que equivale a $(2x + 3)^2$. Esto se puede conseguir fácilmente sumando 9 al lado izquierdo de la ecuación. La misma cantidad debe sumarse, por supuesto, al lado derecho:

$$4x^2 + 12x + 9 = 7 + 9$$
$$(2x + 3)^2 = 16$$

que se reduce a

$$2x + 3 = \sqrt{16}$$

o

$$2x + 3 = +4$$

y

$$2x + 3 = -4$$

pues $\sqrt{16}$ tiene dos valores. La primera ecuación da la solución $x = \frac{1}{2}$ (restando 3 de ambos lados: $2x = 1$, y dividiendo ambos lados por 2: $x = \frac{1}{2}$). La segunda ecuación da $x = -7/2$. Ambas soluciones se pueden verificar como antes, sustituyendo los valores en cuestión en la ecuación original. Esta forma de resolución se suele denominar método del cuadrado perfecto.

En general, cualquier ecuación cuadrática de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

se puede resolver utilizando la *fórmula cuadrática.* Para cualquier ecuación de este tipo las dos soluciones de x están dadas por la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Por ejemplo, para encontrar las raíces de

$$x^2 - 4x = -3$$

primero se pone la ecuación en su forma general:

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

Por tanto, $a = 1$, $b = -4$ y $c = 3$. Estos valores se sustituyen en la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(3)}}{2(1)}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 3 \quad y \quad 1$$

Sistemas de ecuaciones

En álgebra, lo normal es que haya que resolver no una sino varias ecuaciones al mismo tiempo. El problema es encontrar el conjunto de todas las soluciones que cumplen todas las ecuaciones simultáneamente. El conjunto de ecuaciones que deben resolverse se denomina *sistema de ecuaciones* y para resolverlo se pueden usar técnicas específicas del álgebra. Por ejemplo, dadas las dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

$$3x + 4y = 10 \qquad (1)$$
$$2x + y = 5 \qquad (2)$$

hay un sistema sencillo: la variable *y* se despeja en la ecuación (2) dando $y = 5 - 2x$; este valor de *y* se sustituye en la ecuación (1):

$$3x + 4\,(5 - 2x) = 10$$

Así el problema se reduce a una ecuación lineal con una sola incógnita *x,* obteniéndose

$$3x + 20 - 8x = 10$$

o

$$-5x = -10$$

de donde

$$x = 2$$

Si este valor se sustituye en cualquiera de las ecuaciones originales (1) o (2), se obtiene que

$$y = 1$$

Otro método más rápido para resolver un sistema de ecuaciones es, en este caso, multiplicar ambos lados de la ecuación (2) por 4, con lo que queda:

$$3x + 4y = 10 \qquad (1)$$
$$8x + 4y = 20 \qquad (2)$$

Si ahora se resta la ecuación (1) de la (2), entonces $5x = 10$, o $x = 2$. Este procedimiento genera otro avance en las matemáticas, las matrices. La teoría de matrices nos ayuda a obtener soluciones para cualquier conjunto de ecuaciones lineales con cualquier número de incógnitas.